

Энгельсский технологический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.»

И.А. Челышева

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА

Решение задач по материалам второго модуля

Методические рекомендации
к выполнению практической работы и подготовке к модулю
по курсу: «Начертательная геометрия» для студентов направлений

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
09.03.04 «Программная инженерия»
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств»
18.03.01 «Химическая технология»
21.03.01 «Нефтегазовое дело»
29.03.05 «Конструирование изделий легкой промышленности»

очной и заочной формы обучения

Энгельс 2024

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

Многие геометрические элементы при проецировании на плоскость представляются в искаженном виде. Часто требуется знать натуральную величину какого-либо элемента или его расположение. В решениях задач стремятся разместить объект таким образом, чтобы требуемый элемент был параллелен или перпендикулярен плоскости проекций, например, прямая стала параллельной или вырождалась в точку, плоскость проецировалась в линию и т.д.

Для получения истинного изображения предметов существуют методы преобразования, которые можно классифицировать на два типа:

- построение по двум проекциям, заданными на основной плоскости, еще одной дополнительной проекции, на неосновную плоскость, которая вводится в существующую систему таким образом, чтобы проецируемый объект располагался параллельно и перпендикулярно вводимой плоскости, сам оставаясь при этом неподвижно.
- изменение положения объекта в пространстве, при неизменной системе плоскостей проекций, до частного положения.

СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ

Способ вращения вокруг некоторой оси заключается в том, что изображаемый объект или его элемент вращается вокруг указанной оси до требуемого положения относительно неподвижной, данной системы плоскостей проекций.

В качестве оси вращения может быть взята любая прямая. В практике преобразования комплексного чертежа лучше использовать вращение вокруг проецирующих осей и линий уровня. Если ось вращения выбрать проходящей через один из концов отрезка, то построение упростится, так как точка, через которую проходит ось, будет неподвижной и для поворота отрезка надо построить новое положение проекции только одной его точки – другого конца.

Если вращать отрезок прямой линии вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, то проекция на эту плоскость не изменяется ни по виду, ни по величине – меняется лишь положение этой проекции относительно оси проекций. На плоскости параллельной оси вращения все точки проекции отрезка перемещаются по прямым, параллельным оси проекций и проекция изменяется и по форме и по величине. Точка А вращается в плоскости α вокруг неподвижной оси i перпендикулярной плоскости Π_1 , описывает окружность радиусом R (рис.1 а, б). При этом на плоскости Π_1 траектория (окружность) точки А проецируется в натуральную величину, а на плоскость Π_2 траектория проецируется в

линию, параллельную оси x .

Для поворота отрезка АВ (рис.1 в) выбрана ось вращения i , перпендикулярная к плоскости Π_1 ($i_2 \perp x$) и проходящая через точку В ($B_1 \equiv i_1$). В плоскости Π_2 проекция оси i не указана.

При повороте вокруг такой оси располагаем отрезок параллельно плоскости Π_2 . Горизонтальная проекция отрезка в новом положении параллельна оси x ($A_1'' // x$). Точка А вращается в плоскости параллельной горизонтальной плоскости проекций и ее фронтальная проекция переместится в точку A_2'' , по линии параллельной оси x до пересечения с линией связи, проведенной от горизонтальной проекции A_1' . Соединив A_2'' с B_2 получим фронтальную проекцию отрезка АВ в новом положении. Эта проекция $A_2''B_2$ выражает натуральную величину отрезка АВ и натуральную величину угла наклона (α) отрезка АВ к плоскости Π_1 .

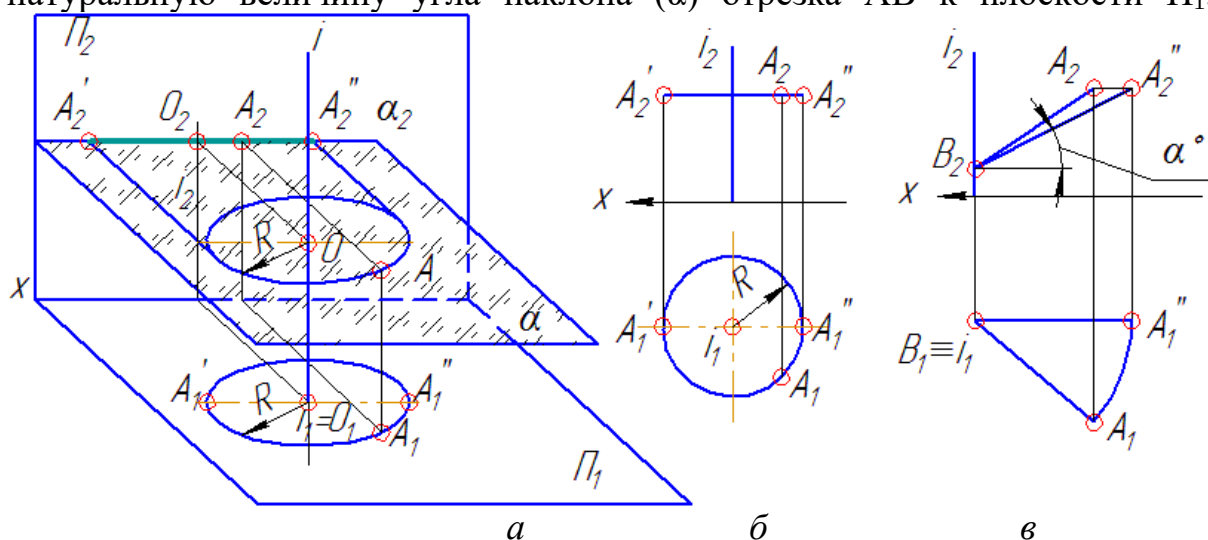


Рис.1

Аналогичное решение последует, если за ось вращения принять $i \perp \Pi_2$ (рис.2). Тогда $i_1 \perp x$, $B_2 \equiv i_2$. При повороте АВ вокруг оси i фронтальная проекция займет положение параллельное оси x $A_2''B_2 // x$, проекция $A_1''B_1$ выражает натуральную величину отрезка АВ, а угол β определяет натуральную величину угла наклона отрезка АВ к плоскости Π_2 .

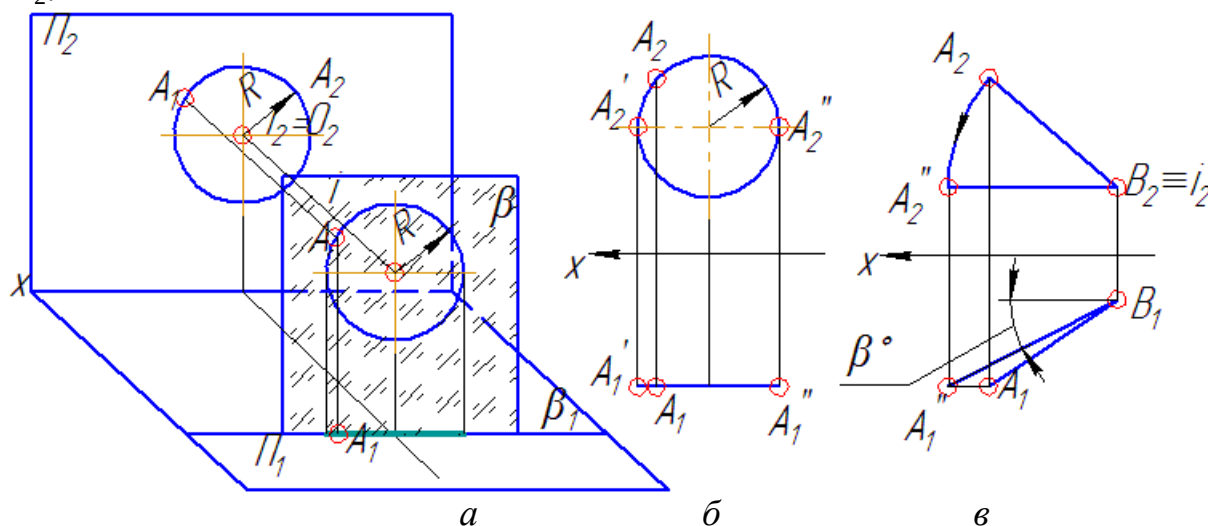


Рис. 2

Задание №1. Найти натуральную величину Отрезка АВ методом вращения вокруг оси перпендикулярной плоскости Π_1 и отрезка CD вращением вокруг оси перпендикулярной плоскости Π_2 (рис.3).

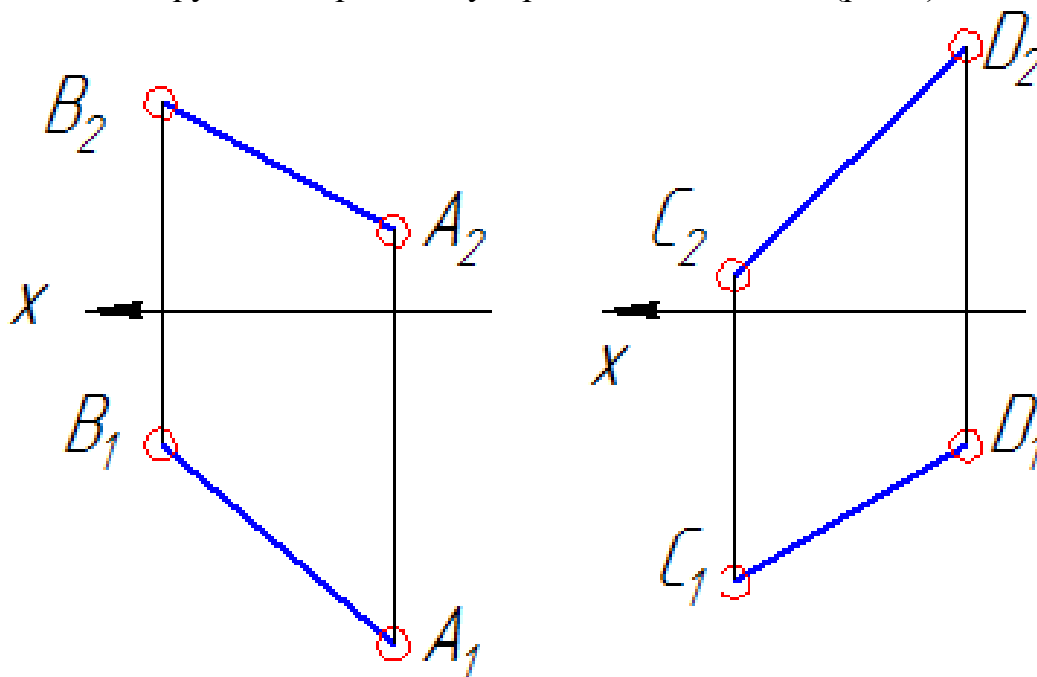


Рис. 3

СПОСОБ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Плоскопараллельным перемещением геометрической фигуры называется такое перемещение, при котором все ее точки перемещаются в плоскостях, параллельных между собой. Плоскопараллельное движение фигуры – это вращение вокруг незакрепленной оси.

Рассмотрим применение плоскопараллельного перемещения для определения натуральной величины треугольника. Для этого выполним два последовательных плоскопараллельных перемещения: первое – перпендикулярно фронтальной плоскости проекций, а второе – параллельно горизонтальной плоскости проекций.

Пусть задан треугольник ACB ($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$) (рис.4). Найти натуральную величину треугольника.

Решение заключается в перемещении треугольника до состояния параллельного одной из плоскостей проекций Π_1 или Π_2 (в нашем случае Π_1). На первой стадии переместим плоскость треугольника таким образом чтобы треугольник занял положение перпендикулярное плоскости проекций (Π_2). Для этого в плоскости треугольника ABC проведем горизонталь h (h_1 , h_2).

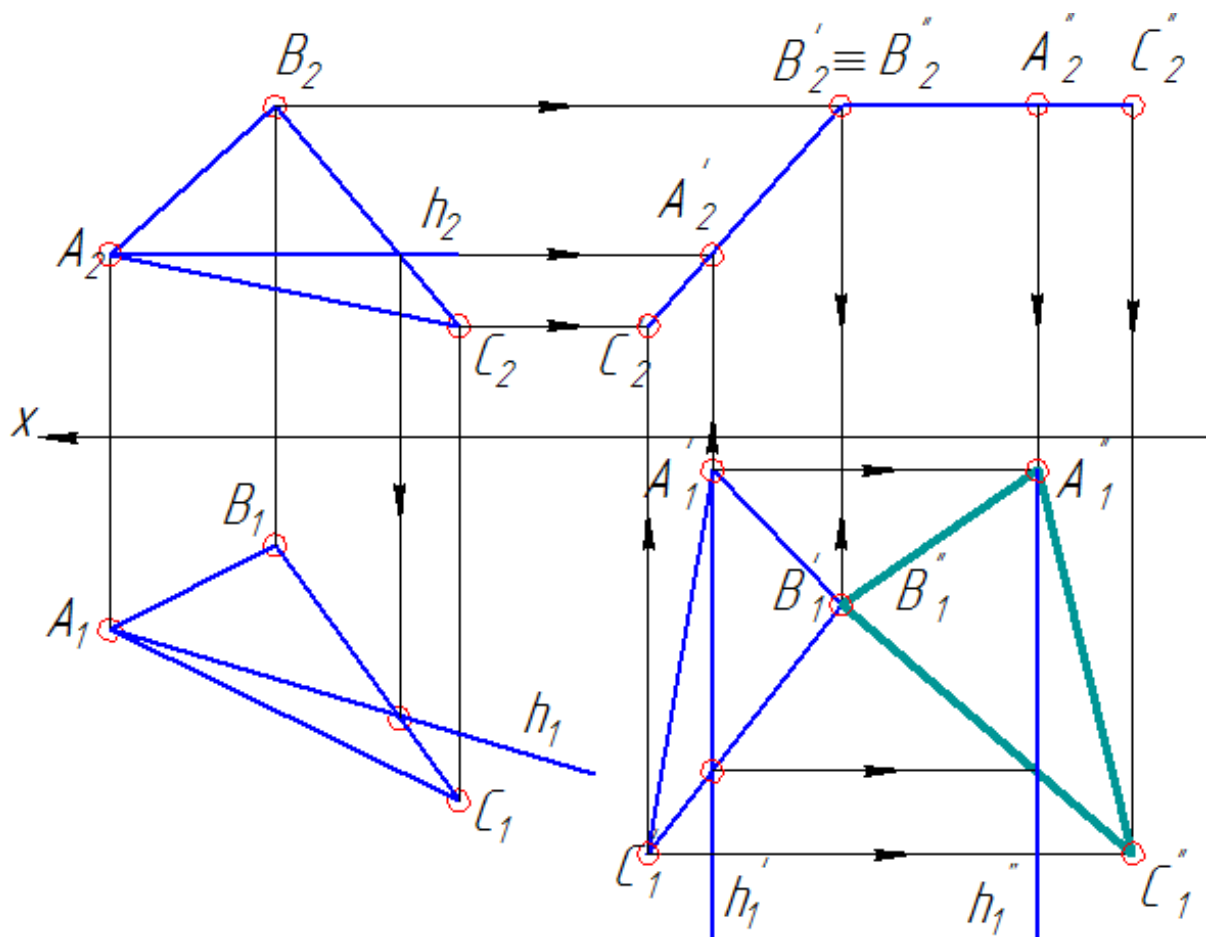


Рис. 4

Поворачиваем треугольник ABC в плоскости Π_1 вокруг произвольной оси (перпендикулярной Π_1), которую на чертеже не указываем, но при необходимости можем найти, до положения, когда проекция горизонтали h_1 окажется перпендикулярной оси x . При этом горизонтальная проекция треугольника сохраняет свой вид и величину ($A_1B_1C_1 = A'_1B'_1C'_1$). При таком повороте точки A , B и C перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости Π_1 . Из точек A'_1, B'_1, C'_1 проводим линии связи в плоскость Π_2 до пересечения с горизонтальными линиями связи, проведенными из точек A_2, B_2, C_2 , получим проекцию $A'_2B'_2C'_2$ треугольника ABC , которая выродится в прямую линию. Это означает, что новое положение треугольника ABC является проецирующим (перпендикулярным).

На следующем этапе осуществляем поворот, приводящий треугольник в положение параллельное плоскости Π_1 ($ABC // \Pi_1$). Подразумевается, что ось вращения перпендикулярна Π_2 . Теперь фронтальная проекция при повороте сохраняет свой вид и величину, полученные точки A'_1, B'_1, C'_1 переместятся в плоскостях, параллельных плоскости Π_2 , до положения A''_2, B''_2 и C''_2 . Проекции точек A''_1, B''_1 и C''_1

находим на пересечении горизонтальных и вертикальных линий связи. Проекция $A_1''B_1''C_1''$ будет натуральной величиной треугольника ABC.

Задание №2. Найти натуральную величину треугольника ABC (рис.5), методом плоскопараллельного перемещения, используя фронталь f плоскости.

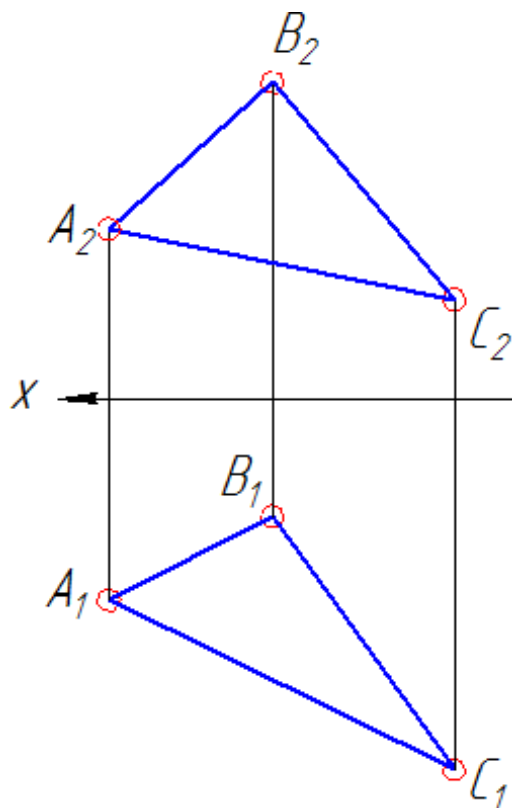


Рис.5

Плоскопараллельным перемещением можно определить натуральную величину отрезка прямой общего положения или преобразовать его в проецирующий. Для этого в одной из плоскостей в рассматриваемом примере в плоскости Π_1 повернем вокруг оси, перпендикулярной к плоскости Π_1 , но эту ось на чертеже не указываем. Так как горизонтальная проекция отрезка не меняет своей величины, то проекцию $A_1'B_1'$ берем равной A_1B_1 и располагаем параллельно оси x . Такое положение проекции дает основание полагать, что сам отрезок параллелен плоскости Π_2 (рис.6). Находим фронтальную проекцию $A_2'B_2'$ отрезка AB по линиям связи, проведенным в плоскости Π_2 от точек A_2 и B_2 параллельно оси x и в плоскости Π_1 от точек A_1' и B_1' перпендикулярно оси x . На пересечении линий связи получим фронтальную проекцию $A_2'B_2'$ нового положения отрезка AB. Проекция $A_2'B_2'$ выражает натуральную величину отрезка AB. Второй поворот выполняем вокруг оси перпендикулярной плоскости Π_2 до положения

перпендикулярности AB к плоскости Π_1 , расположив проекцию $A_2''B_2'' \perp x$, горизонтальная проекция вырождается в точку $A_1'' \equiv B_1''$.

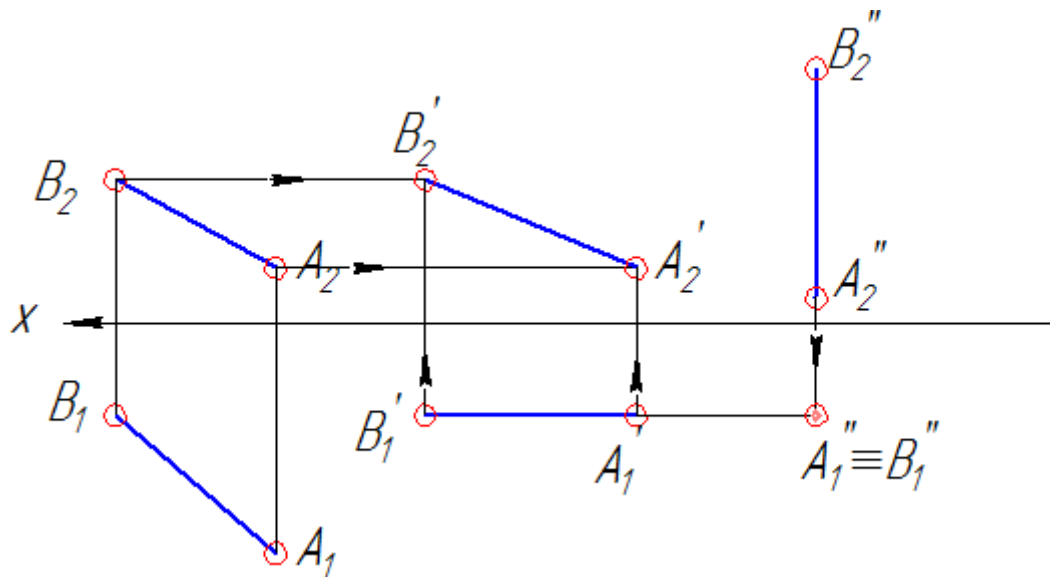


Рис.6

Задание №3. Преобразовать отрезок общего положения (рис.7) в проецирующий (перпендикулярный).

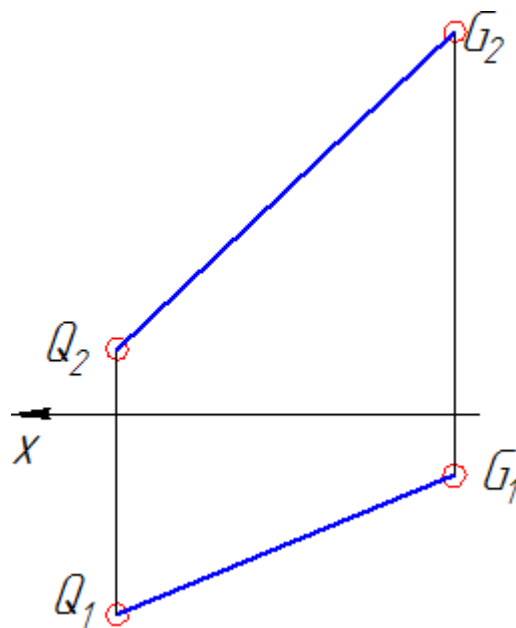


Рис.7

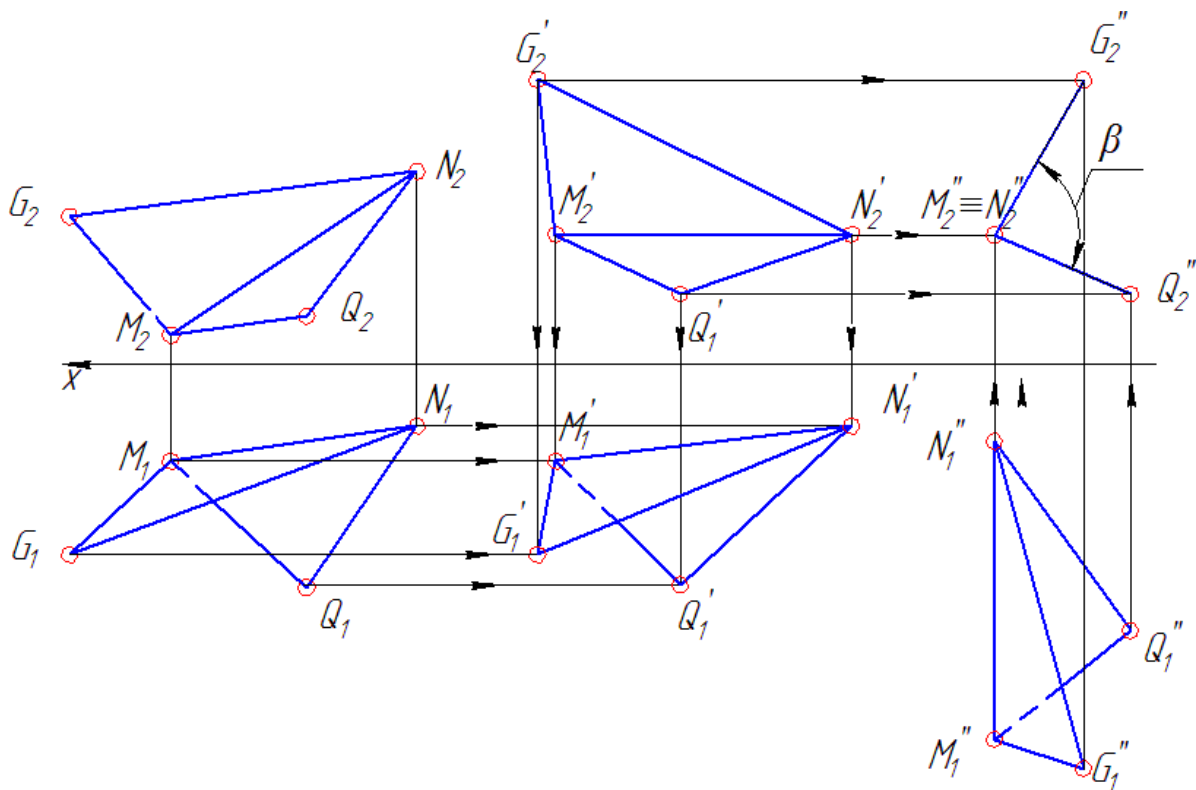
Плоскопараллельное перемещение можно использовать и для определения натуральной величины двугранного угла, образованного двумя пересекающимися плоскостями. Решение сводится к преобразованию двугранного угла в линейный, измеряющий двугранный угол. Ребром двугранного угла служит линия, образованная пересечением граней. Если ребро окажется перпендикулярным к плоскости, то на эту плоскость ребро

проецируется в точку, а грани в виде отрезков, угол между которыми равен линейному углу данного двугранного (рис.8).

Пусть дан двугранный угол, образованный треугольными гранями QMN и MGN. Найти натуральную величину этого угла.

Решение заключается в перемещении двугранного угла таким образом, чтобы ребро MN, заняло положение, перпендикулярное Π_2 . Фронтальную проекцию двугранного угла, вращаем вокруг оси, без указания ее, перпендикулярной Π_2 до положения при котором ребро MN будет параллельно оси x $M'_2N'_2 // x$. Фронтальная проекция двугранного угла сохраняя свой вид и величину займет новое положение $M'_2N'_2G'_2Q'_2$. По линиям связи, проведенным от M_1, N_1, G_1, Q_1 параллельно оси x и от M'_2, N'_2, G'_2, Q'_2 перпендикулярно оси x определяем горизонтальную проекцию $M'_1N'_1G'_1Q'_1$ двугранного угла.

Второй поворот осуществляем вокруг произвольной оси (в задаче не показана) перпендикулярной Π_1 . Горизонтальная проекция двугранного угла при повороте сохраняет свой вид и размер, но занимает новое положение $M''_1N''_1G''_1Q''_1$, при котором ребро MN перпендикулярно оси x ($M''_1N''_1 \perp x$). Фронтальную проекцию $M''_2N''_2G''_2Q''_2$ найдем по линиям связи, при этом $M''_2 \equiv N''_2$, а грани проецируются в линии, угол β между которыми будет линейным углом двугранного.



The diagram shows a rectangular frame with a horizontal load X applied at the top-left corner. The frame consists of vertical members M_1M_2 and N_1N_2 , and horizontal members M_1N_1 and M_2N_2 . Diagonal members are shown as solid blue lines: M_1Q_1 , Q_1N_1 , M_2Q_2 , and Q_2N_2 . A dashed blue line represents the diagonal M_2N_1 . The points Q_1 and Q_2 are located on the vertical members M_1N_1 and M_2N_2 respectively. The horizontal load X is indicated by an arrow pointing to the left at the top-left corner.

ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ЛИНИИ УРОВНЯ

Проведем горизонталь h (h_1, h_2) ($h_2 \parallel x_{12}$, h_1 - по принадлежности) плоскости треугольника ABC ($h \subset ABC$). Вершины B и C будем вращать вокруг горизонтали h_1 , вершина A остается неподвижной, так как она лежит на горизонтали (рис.10).

Вращение вершин вокруг горизонтали осуществляем по очереди. Вращаем вершину B .

Точка B вращается вокруг некоторой оси, описывая дугу окружности радиусом $R_{вр}$ в некоторой плоскости $\gamma \perp \Pi_1$. Радиус вращения $R_{вр}$ находим опустив перпендикуляр из B_1 к h_1 . Пересечение перпендикуляра с h_1 отметим точкой (O_1'), которая является центром вращения вершины B . Проекция B_1O_1' будет радиусом вращения ($R_{вр}$). Определяем натуральную

Вращение вершин вокруг горизонтали осуществляем по очереди. Вращаем вершину В.

Точка В вращается вокруг некоторой оси, описывая дугу окружности радиусом $R_{вр}$ в некоторой плоскости $\gamma \perp \Pi_1$. Радиус вращения $R_{вр}$ находим опустив перпендикуляр из B_1 к h_1 . Пересечение перпендикуляра с h_1 отметим точкой (O_1') , которая является центром вращения вершины В. Проекция B_1O_1' будет радиусом вращения ($R_{вр}$). Определяем натуральную

12

Вращаем вершину С.

Точка С вращается вокруг некоторой оси, описывая дугу окружности радиусом $R_{вр}$ в некоторой плоскости $\beta \perp \Pi_1$. Радиус вращения $R_{вр}$ находим опустив перпендикуляр из C_1 к h_1 . Пересечение перпендикуляра с h_1 отметим точкой (O_1''), которая является центром вращения вершины С. Проекция $O_1''C_1$ будет радиусом вращения ($R_{вр}$) вершины С. Определяем натуральную величину радиуса вращения методом прямоугольного треугольника. Из вершины C_1 восстанавливаем перпендикуляр p к отрезку $O_1''C_1$, на котором от C_1 откладываем Δz_1 - разность высот точек С и O'' , отметим т C_1' , которую соединим с O_1'' . $O_1''C_1'$ будет натуральной величиной $O_1''C_1$ - радиуса вращения вершины С вокруг горизонтали. Вращением вокруг O_1'' перемещаем натуральную величину $O_1''C_1'$ в плоскость вращения β_1 и отмечаем т C_1'' .

Соединим точки A_1, C_1'' и B_1'' получим новое положение проекции плоскости треугольника АВС, параллельного плоскости Π_1 . Следовательно, $A_1C_1''B_1''$ определяет натуральную величину треугольника АВС.

Задание № 5. Определить натуральную величину треугольника АВС методом вращения вокруг фронтали (рис.11).

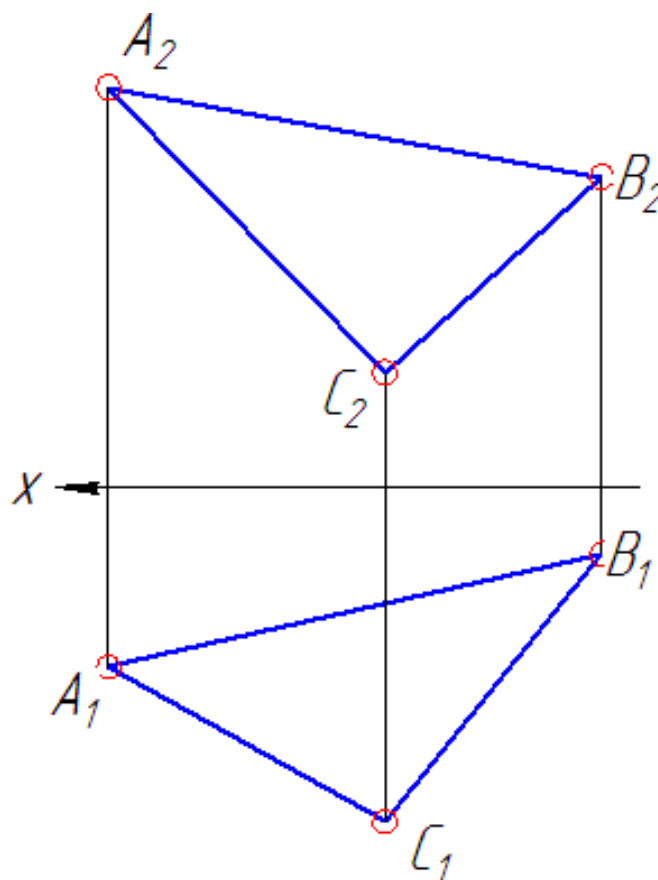


Рис. 11

Рис.10

Задание №6. Найти натуральную величину угла при вершине А, вращение вокруг горизонтали (рис.12)

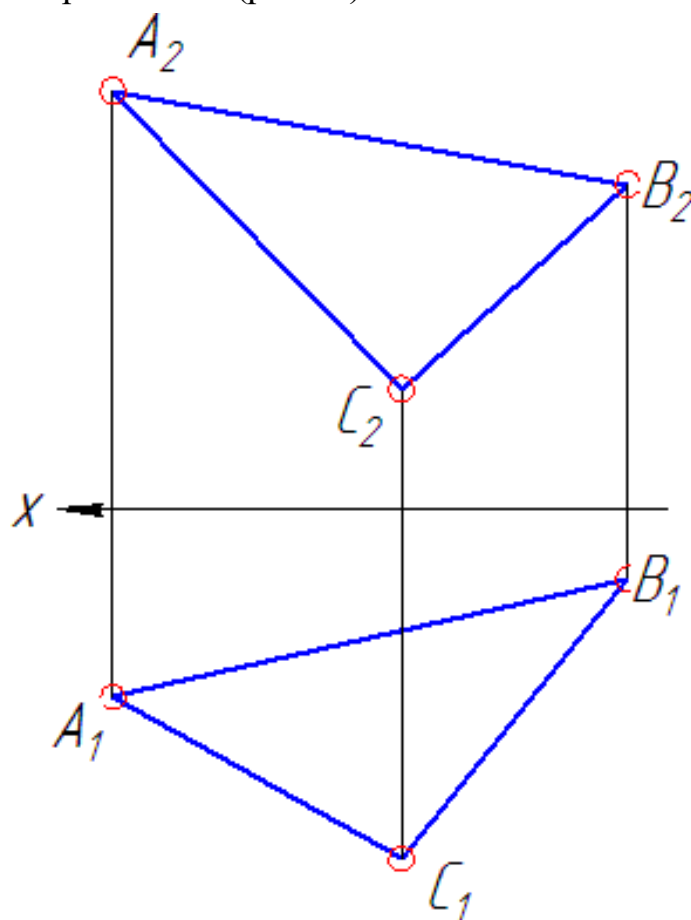


Рис.12

СПОСОБ ПЕРЕМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ.

Сущность способа заключается в том, что положение изображаемых объектов в пространстве остается неизменным, а система плоскостей Π_1, Π_2 дополняется новыми плоскостями, образующими с Π_1 и Π_2 или между собой, системы двух взаимно перпендикулярных плоскостей, принимаемых за плоскости проекций. Каждая новая система выбирается так, чтобы получить положение, наиболее удобное для выполнения нужного построения. Дополнительная плоскость, вводимая в систему Π_1, Π_2 в качестве плоскости проекций, выбирается согласно какому-либо условию, например, получить натуральную величину отрезка, угол его наклона к плоскости проекций, преобразовать отрезок в проецирующий и т. д.

В случае определения натуральной величины отрезка необходимо ввести дополнительную плоскость параллельную отрезку AB ($AB // \Pi_4$) (рис. 13) ось x_{14} параллельна A_1B_1 ($x_{14} // A_1B_1$). Следовательно, на эюре в плоскости Π_1 проводим ось $x_{14} // A_1B_1$ (рис.14). В плоскости Π_4 расстояние от оси x_{14} до A_4 (B_4) равняется расстоянию от оси x_{12} до A_2

(B_2) в плоскости Π_2 ($A_{x_{12}}A_2 = B_{x_{14}} B_4$; ($A_{x_{12}} B_2 = B_{x_{14}} B_4$) (рис.14). На эюре в плоскость Π_4 перпендикулярно новой оси x_{14} проводим линии связи, на которых от оси x_{14} откладываем высоту точек.

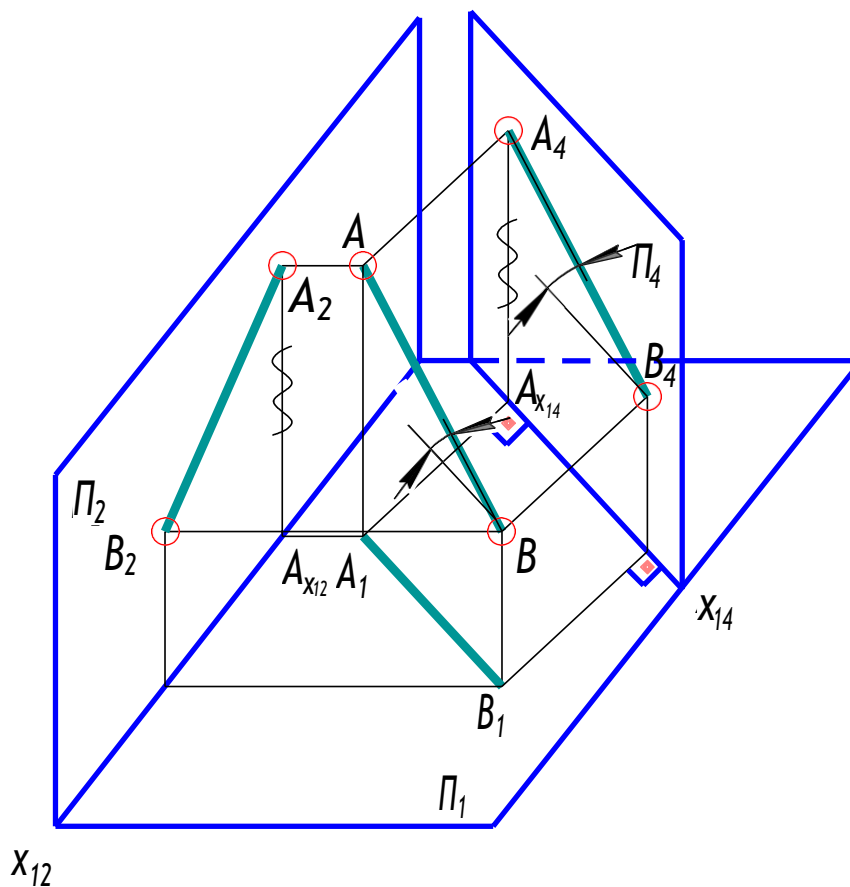


Рис.13

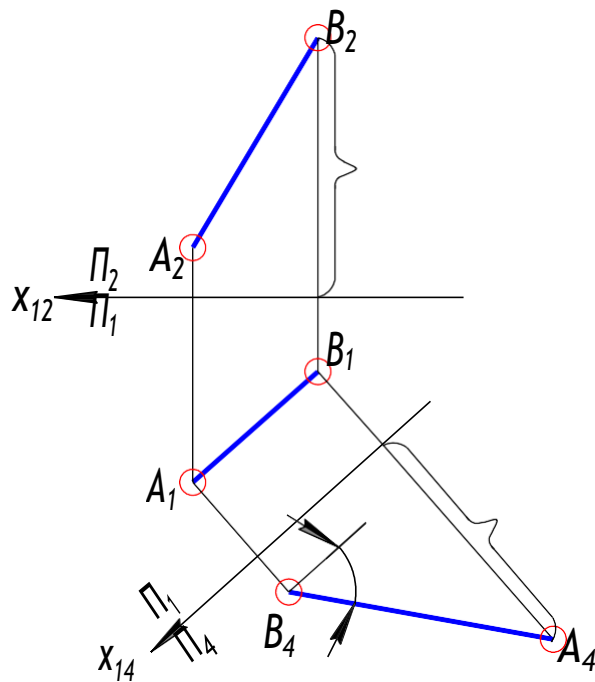


Рис. 14

В данной задаче можем найти угол наклона отрезка АВ к плоскости Π_1 , который будет измеряться углом между A_4B_4 и осью x_{14} .

$$x_{12} \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_{14} \frac{\Pi_1}{\Pi_4}$$

$\Pi_4 \parallel AB$, $x_{14} \parallel A_1B_1$

Задание № 7. Найти натуральную величину отрезка АВ (рис.15) прямой общего положения и угол его наклона к плоскости Π_2 .

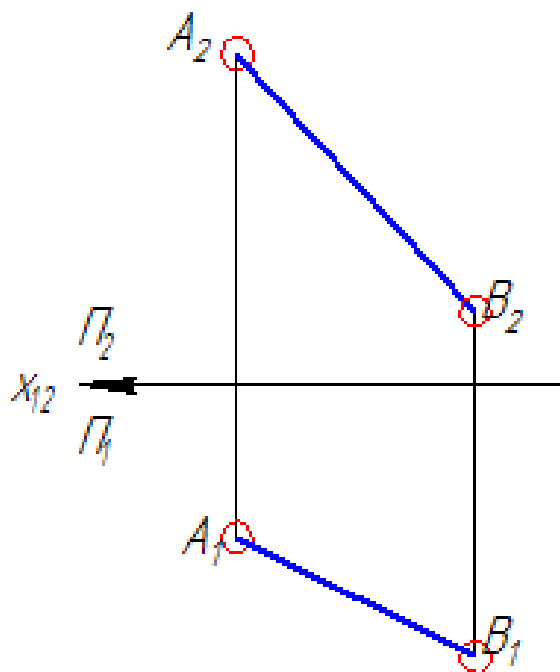


Рис.15

При преобразовании отрезка прямой общего положения в проецирующий недостаточно одной замены, необходимо произвести две замены плоскостей проекций. Сначала вводим новую плоскость проекций Π_4 параллельную отрезку АВ, с помощью такой замены найдем натуральную величину отрезка АВ. На следующем этапе введем плоскость проекций Π_5 перпендикулярную отрезку АВ (рис.15). Символически можно записать:

$$x_{12} \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow x_{14} \frac{\Pi_1}{\Pi_4} \rightarrow x_{45} \frac{\Pi_4}{\Pi_5}$$

1. $\Pi_4 \parallel AB$, $x_{14} \parallel A_1B_1$
2. $\Pi_5 \perp AB$, $x_{45} \perp A_4B_4$.

Построение проекции A_1B_1 описано на странице 13-14. Дальнейшее решение будет: проводим ось x_{45} новой плоскости перпендикулярно A_1B_1 и проводим линии связи т.к. $x_{45} \perp A_1B_1$, то линия связи будет одна, на которой в плоскости Π_5 от оси x_{45} отложим расстояние, равное расстоянию от оси x_{14} до B_1 (A_1) $B_1A_1x_{14}$

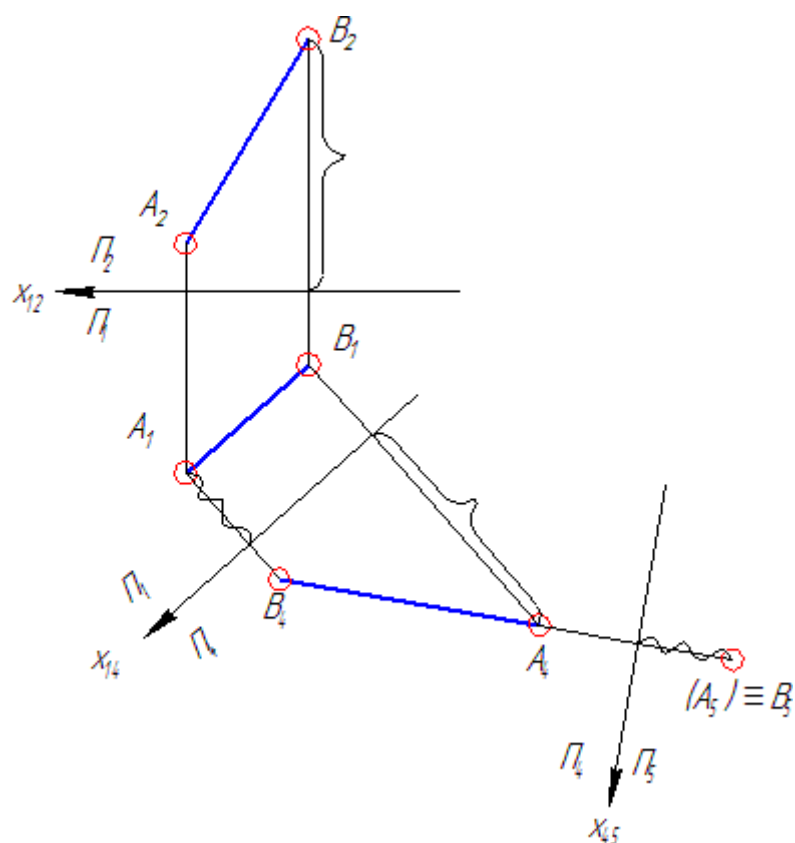


Рис. 16

Задание № 8. Преобразовать отрезок АВ (рис.17) прямой общего положения в проецирующий и найти угол его наклона к плоскости Π_1 .

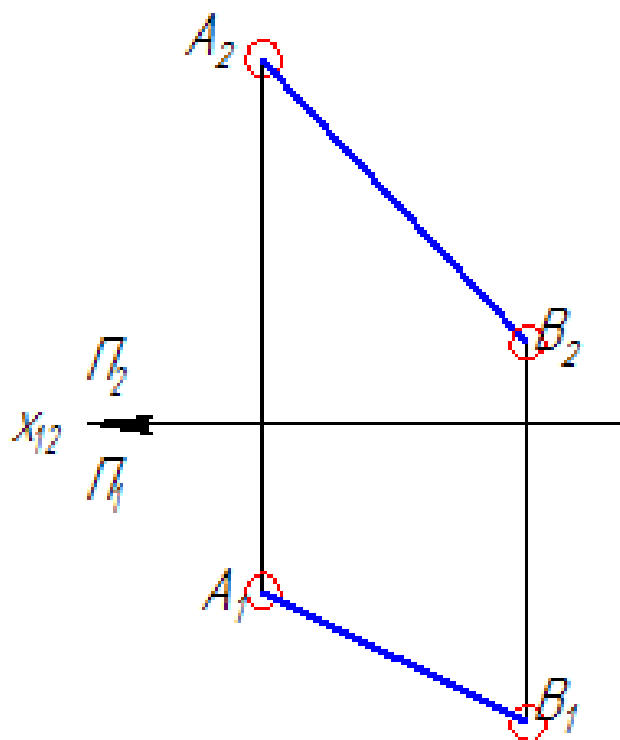


Рис.17

Для определения натуральной величины плоской фигуры (треугольника) общего положения используем метод замены плоскостей, при котором последовательно вводим дополнительные плоскости, сначала перпендикулярную заданному треугольнику, а потом параллельную. Плоскость ABC на чертеже будет перпендикулярна плоскости проекций, если ее горизонтальная проекция h_1 горизонтали h (фронтальная проекция f_2 фронтали f) будет перпендикулярна новой оси x_{14} (x_{24}) (рис.8). Поэтому первым пунктом в решении задачи будет построение горизонтали (фронтали) заданной плоскости. Затем проводим ось x_{14} перпендикулярную горизонтальной проекции горизонтали (или x_{24} перпендикулярную фронтальной проекции фронтали) и проецируем точки A, B и C в плоскость Π_4 .

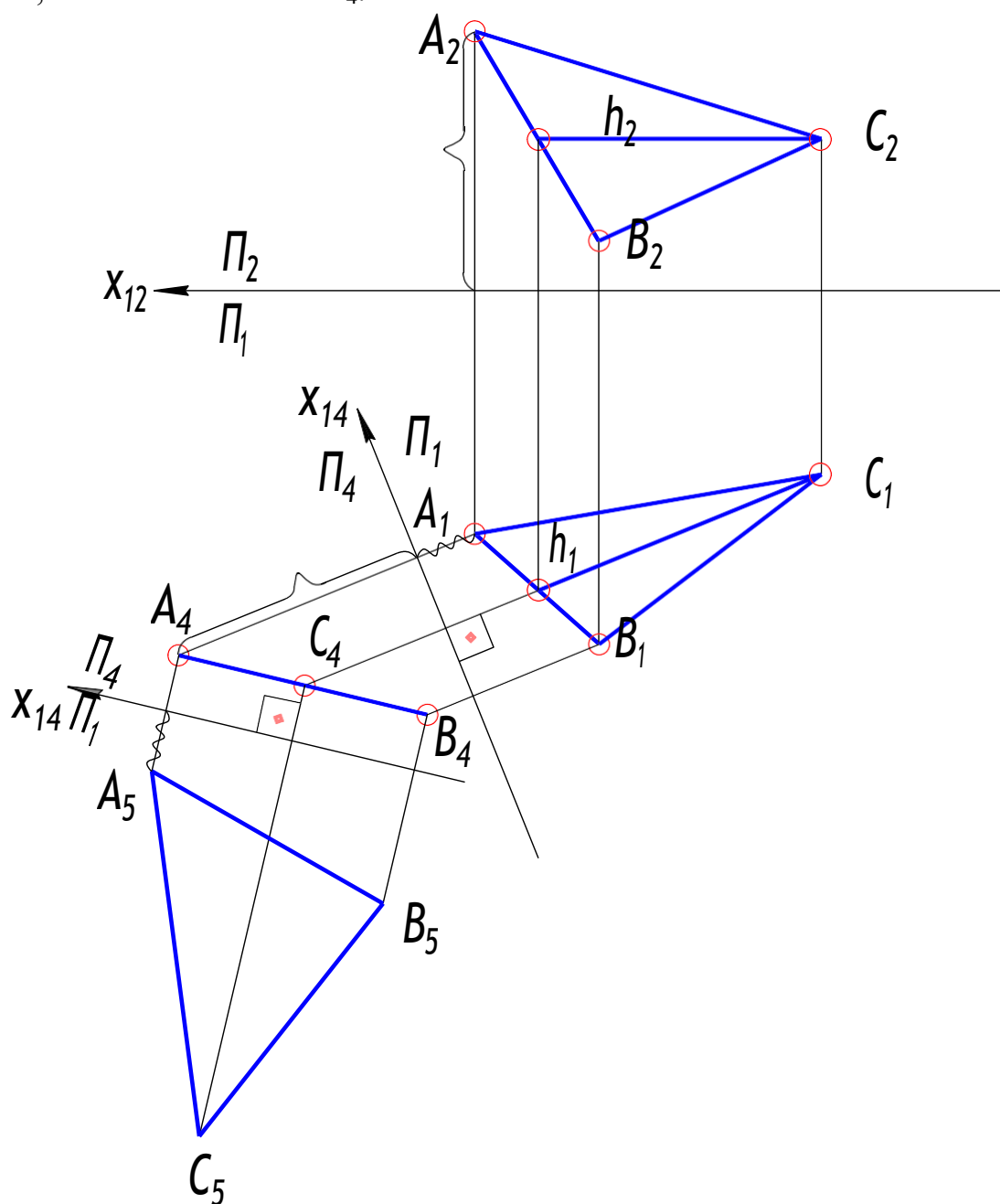


Рис. 18

Расстояние в плоскости Π_4 , откладываем равное координате точек А и В по оси z, т.е. высоту точек А и В. Плоскость треугольника ABC в плоскости Π_4 проецируется в линию ($A_4B_4C_4$). Далее вводим новую плоскость Π_5 , параллельную плоскости треугольника ABC ($\Pi_5 // ABC$). Новую ось проводим параллельно $A_4B_4C_4$. Проецируем точки в плоскость Π_5 . Линии связи проводим перпендикулярно оси x_{45} . В эту плоскость треугольник проецируется в натуральную величину.

Алгоритм решения:

$$x_{12} \rightarrow x_{14} \rightarrow x_{45}$$

$$\Pi_2/\Pi_1 \rightarrow \Pi_1/\Pi_4 \rightarrow \Pi_4/\Pi_5$$

$$\Pi_4 \perp ABC, \quad x_{14} \perp h_1 (h \in ABC)$$

$$\Pi_5 // ABC, \quad x_{45} // A_4 B_4 C_4$$

Задание № 9. Найти угол наклона плоскости треугольника ABC (рис.19), занимающего общее положение к плоскости Π_1 .

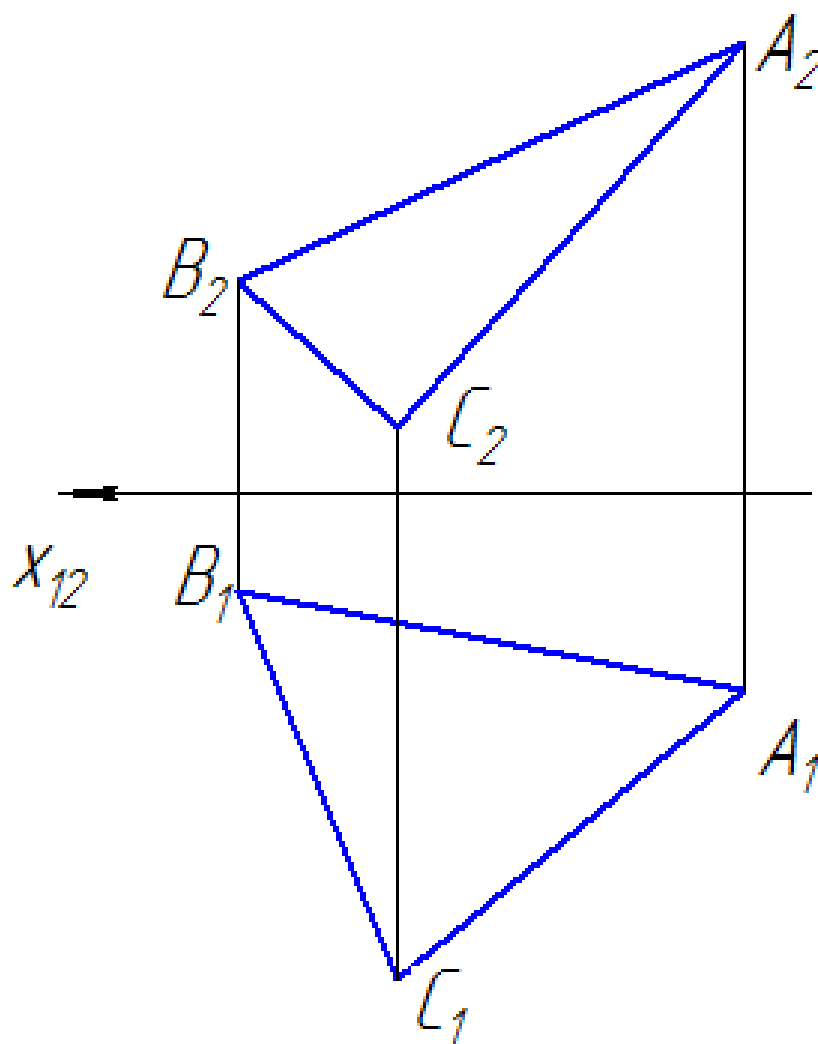


Рис. 19

Задание № 10. Найти натуральную величину треугольника ABC (рис.20), занимающего общее положение и угол его наклона к плоскости Π_2 .

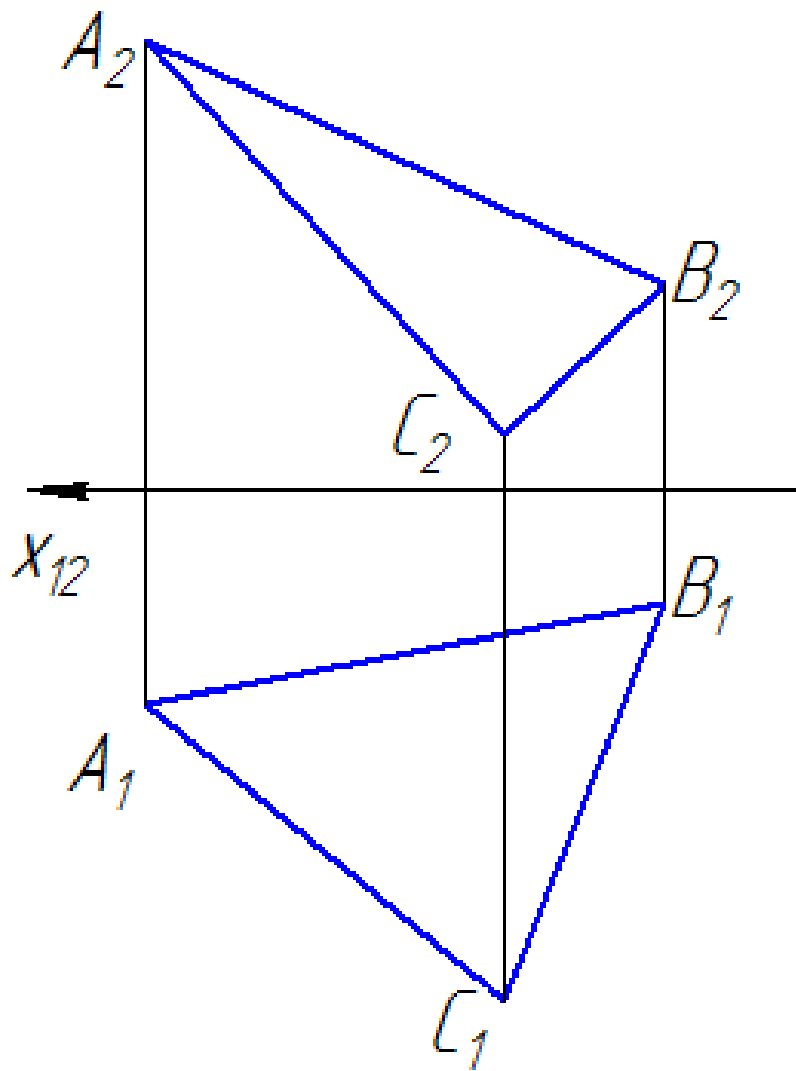


Рис.20

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА

Решение задач по материалам второго модуля

Методические рекомендации
к выполнению практической работы и подготовке к модулю
по курсу: «Начертательная геометрия для студентов всех направлений
очной и заочной форм обучения

ЧЕЛЫШЕВА Ирина Александровна

Подписано в печать	Формат 60x84 1/16
Бум. офсет.	Усл. печ. л.
Тираж 100 экз.	Уч.-изд.л.
Заказ	Бесплатно

Саратовский государственный технический университет
410054, Саратов, Политехническая ул., 77
Отпечатано в РИЦ СГТУ. 410054, Политехническая ул., 77